Wiederholung der letzten Vorlesung

- Berechnung von Unterschieden:

  - Chi-Quadrat-Test: Unterscheiden sich die beobachteten Werte von den erwarteten Werten?

  - McNemar-Test: Unterscheiden sich die beobachteten Veränderungen von den erwarteten Veränderungen bei zwei abhängigen Stichproben?

  - CochranQ-Test: McNemar-Test für mehr als zwei Stichproben

U-Test für mittlere Stichproben

4. Berechnung:

$$U = N_1 \times N_2 + \frac{N_1(N_1+1)}{2} - R_1$$

$$U' = N_1 \times N_2 + \frac{N_2(N_2+1)}{2} - R_2$$

R1: Rangsumme der Gruppe G1

R2: Rangsumme der Gruppe G2

5. Signifikanzprüfung:

   Der kleinere der beiden U-Werte wird mit dem Tabellenwert verglichen:

   emp. U-Wert $\geq$ theor. U-Wert à H0 trifft zu

   emp. U-Wert $<$ theor. U-Wert à H1 trifft zu

Beispiel U-Test für mittlere Stichproben

1. Problemstellung:

   Es soll überprüft werden, ob massiertes oder verteiltes Lernen beim Erlernen eines Hindernislaufes bessere Ergebnisse bringt. Die Ergebnisse werden in in Zeit (s) gemessen.

G1 (massiertes Lernen):	9,3	7,8	9,2	12,2	11,5	10,7	8,2	15,3	8,1
G2 (verteiltes Lernen):	9,9	8,5	10,6	11,3	10,9	7,6	13,1	11,0	10,2

4. Berechnung:

   Erstellung der Rangreihen, wobei bei gleichen Rangwerten mittlere Rangplätze vergeben werden:

Beispiel U-Test für mittlere Stichproben

Zeit	Gruppe	Rangplätze G1	Rangplätze G2
7,6	2		1
7,8	1	2	
8,1	1	3	
8,2	1	4	
8,5	2		5
9,2	1	6	
9,3	1	7	
9,9	2		8
10,2	2		9
10,6	2		10
10,7	1	11	
10,9	2		12
11,0	2		13
11,3	2		14
11,5	1	15	
12,2	1	16	
13,1	2		17
15,3	1	18	
		82	*89*

Beispiel U-Test für mittlere Stichproben

$U = 9 \times 9 + 9(9 + 1)/2 - 82 = 44$

$U' = 9 \times 9 + 9(9 + 1)/2 - 89 = 37$

5. Signifikanzprüfung (p=.05):

   37 > 17 à H0 trifft zu

6. Interpretation:

   In der vorliegenden Studie ergeben sich keine Unterschiede zwischen massiertem und verteiltem Lernen.

U-Test für große Stichproben

4. Berechnung:
   siehe U-Test für mittlere Stichproben

5. Signifikanzprüfung:
   Bei großen Stichproben nähert sich die U-Verteilung der Normalverteilung dahingehen, dass die Signifikanzprüfung mit Hilfe von z-Werten erfolgt:

$$z = \frac{U - \frac{N_1 \times N_2}{2}}{\sqrt{\frac{(N_1 \times N_2) \times (N_1 + N_2 + 1)}{12}}}$$

Da z-Werte symmetrisch verteilt sind ist es unerheblich, welcher U-Wert verwendet wird. Der errechnete z-Wert wird mit dem Tabellenwert verglichen:

$z \leq$ Tabellenwert à H0 gilt

$z >$ Tabellenwert à H1 gilt

Beispiel U-Test für große Stichproben

1. Problemstellung:

   Unterscheiden sich Jungen (n1=16) und Mädchen (n2=22) hinsichtlich der Leistungsfähigkeit in einem Fitnesstest?

4. Berechnung:

   - geg: R1 = 228; R2 = 513
   - Berechnung von U: U = 16 x 22 + 16(16+1)/2 – 228 = 260

     U´ = 92

5. Signifikanzprüfung:

   z: Zähler: 260 – 22 x 16/2 = 84

   Nenner: √ 22 x 16(22+16+1)/12 = 33.82

   à z = 84 / 33.82 = 2.48

Beispiel U-Test für große Stichproben

Für den Betrag von z kann man die Irrtumswahrscheinlichkeit nicht direkt ablesen, da die z-Werte der Tabelle 2.30 bzw. 2.50 betragen.

Durch Interpolation erhält man für z = 2.48 eine Irrtumswahrscheinlichkeit von p=.01 bei einseitiger Fragestellung (2-seitig: p=.02)

p<.05 à H1 trifft zu

6. Interpretation:

Für das Testverfahren gibt es Unterschiede in der Fitnessleistung von Jungen und Mädchen.

Wilcoxon-Test

1. Problemstellung:

   Es liegen zwei abhängige Messungen hinsichtlich eines bestimmten Merkmals vor und es interessiert, ob sich die beiden Messwertreihen signifikant unterschieden.

2. Hypothesen:

   H0: Die beiden Stichproben unterschieden sich nicht signifikant hinsichtlich des beobachteten Merkmals.

   H1: Die beiden Stichproben unterscheiden sich signifikant hinsichtlich des beobachteten Merkmals.

3. Voraussetzungen:

   - Ordinalskalenniveau
   - abhängige Stichproben

Wilcoxon-Test

4. Berechnung:

   - paarweise Anordnung der Messwerte und Bildung von Differenzwerten
   - Transformation der differenzwerte in Rangreihe unabhängig vom Vorzeichen
   - Addition der Rangwerte getrennt für positive und negative Differenzwerte

   à Man erhält die Prüfgrößen T bzw. T´ mit

$T < T'$	Messwertreihe 1 schlechter als 2
$T > T'$	Messwertreihe 1 besser als 2

5. Signifikanzprüfung

   a: Kleine Stichproben ($n < 25$)

$T \geq$ Tabellenwert	à	H0 gilt
$T <$ Tabellenwert	à	H1 gilt

Wilcoxon-Test

b. Große Stichproben:

Prüfung der Signifikanz über z-Verteilung durch Transformation des T-Werts in einen z-Wert:

$$z = \frac{T - \frac{N \times (N+1)}{4}}{\sqrt{\frac{N \times (N+1) \times (2N+1)}{24}}}$$

Beispiel Wilcoxon-Test

1. Problemstellung:

   Es wird der Erfolg von Unfallverhütungsmaßnahmen in Betrieben (n=10). Verglichen wird die monatliche Unfallzahl vor und nach der Aufklärungskampagne (Unfallhäufigkeiten siehe Berechnung).

2. Hypothesen:

   H0: Die Unfallhäufigkeiten vor und nach den Verhütungsmaßnahmen unterscheiden sich nicht.

   H1: Die Unfallhäufigkeiten unterscheiden sich.

3. Voraussetzungen:

   Sind gegeben (vgl. Berechnungen)

Beispiel Wilcoxon-Test

4. Berechnung:

Betrieb	vorher	nachher	d	Rd	Rd-	Rd+
1	8	4	4	7,5		7,5
2	23	16	7	10		10
3	7	6	1	2		2
4	11	12	-1	2	2	
5	5	6	-1	2	2	
6	9	7	2	4,5		4,5
7	12	10	2	4,5		4,5
8	6	10	-4	7,5	7,5	
9	18	13	5	9		9
10	9	6	3	6		6
					T = 4	T´= 24

Beispiel Wilcoxon-Test

5. Signifikanzprüfung:

   Auch hier wird der kleinere T-Wert zur Signifikanzprüfung verwendet.

   Der empirische T-Wert ist größer als der Wert der Tabelle à H0 bleibt erhalten

6. Interpretation:

   Die Aufklärungskampagne hat keinen signifikanten Einfluss auf die Unfallzahlen.

Bisher – Im Folgenden – Teil 2
Berechnung von Unterschieden

Bisher

Verfahren bei nominal skalierten Daten

und

Verfahren bei ordinalskalierten Daten

Im Folgenden

Verfahren bei mindestens intervallskalierten Daten:

2 Stichproben

anhängig	unabhängig
↓	↓
T-Test für unabhängige Stichproben	T-Test für abhängige Stichproben

Allgemeines zum t-Test

3. Voraussetzungen:

- Normalverteilung (gegen eine Verletzung ist der t-Test relativ robust)
- Varianzhomogenität – ist diese nicht gegeben, muss der Test für heterogene Varianzen durchgeführt werden

0. Idee:

Durch die Prüfgröße t wird die Mittelwertsdifferenz der beiden Stichproben an den vorgefundenen Varianzen relativiert: bei einem großen mittleren Unterschied zwischen zwei Messungen und geringen Streuungen innerhalb der Gruppen, kann auf eine überzufällige Unterschiedlichkeit der beiden Messungen geschlossen werden à t nimmt einen höheren Wert an!

Wann rechne ich welchen t-Test

Ist das zu untersuchende Merkmal intervallskaliert?

nein → Auswahl eines Prüfverfahrens laut Systematik in 8.1

ja → Handelt es sich um unabhängige oder abhängige Stichproben?

unabhängige → t-Test für unabhängige Stichproben (8.1.6.1)

abhängige → t-Test für abhängige Stichproben (8.1.6.2)

Sind die Varianzen homogen? Entscheidung durch F-Test (Exkurs)

ja → t-Test für homogene Varianzen (8.1.6.1)

nein → t-Test für heterogene Varianzen (8.1.6.1)

T-Test für unabhängige Stichproben – t-Test bei homogener Varianz

1. Problemstellung:

   Unterscheiden sich die Mittelwerte zweier Zufallstichproben voneinander? Bzw. gehören zwei unabhängige Zufallsstichproben hinsichtlich eines intervallskalierten Merkmals derselben Population an oder wurden sie aus verschiedenen Populationen gewonnen?

2. Hypothesen

   H0: Der Unterschied zwischen beiden Stichproben ist rein zufällig.

   H1: Der Unterschied ist überzufällig.

T-Test für unabhängige Stichproben – t-Test bei homogener Varianz

3. Voraussetzungen:
   - Intervallskala
   - Varianzhomogenität (mittels F-Test)
   - Normalverteilung (mittels Kolmogorov-Smirnov-Test)

4. Berechnungen:

$$t = \frac{\left|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\right|}{\sqrt{\frac{(N_1 - 1)\times s_1^2 + (N_2 - 1)\times s_2^2}{N_1 + N_2 - 2} \times \left(\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2}\right)}}$$

Mit den Stichprobenmittelwerten, Stichprobenvarianzen und Stichprobengrößen.

T-Test für unabhängige Stichproben – t-Test bei homogener Varianz

5. Signifikanzprüfung:

   df = (n1 - 1) + (n2 - 1) = n1 + n2 – 2

   emp. T-Wert < theor. Wert → H0 trifft zu

   emp. T-Wert ≥ theor. Wert → H1 trifft zu