Standardnormalverteilung

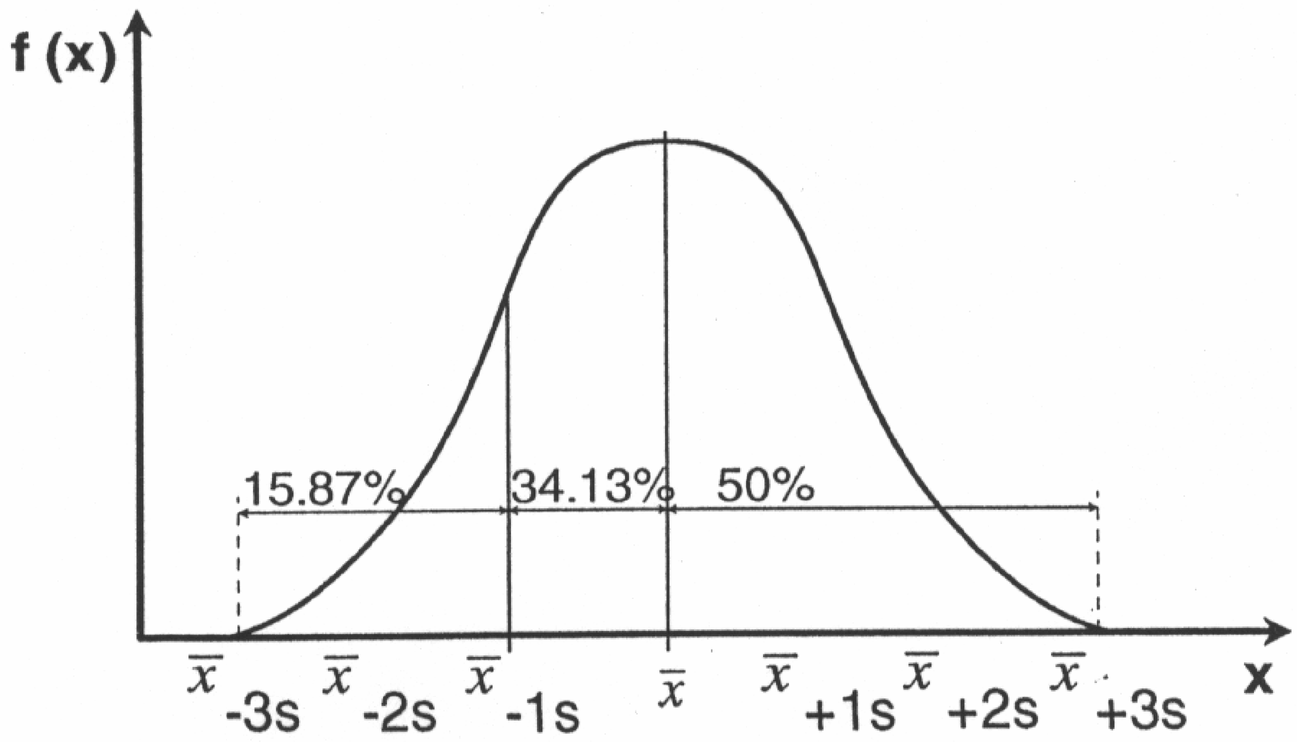
- Beschreibung:

  Ist eine Normalverteilung mit einem beliebigen μ und σ gegeben, so kann diese durch eine z-Transformation in eine Normalverteilung mit $\mu = 0$ u□Ş $\sigma = 1$ übergeführt werden. Solche Verteilungen werden auch Standardnormalverteilungen genannt.

- Information:

  Verteilungen unterschiedlicher Form können in ein gemeinsames Bezugssystem gebracht werden. D.h. es können Daten mit unterschiedlichen Mitteln und/oder Standardabweichungen verglichen werden.

Standardnormalverteilung



Standardnormalverteilung

- Eigenschaften:

  $\mu = 0$, $\sigma = 1$, Schiefe = 0 (symmetrisch), Exzess = 0 (normalsteil)

- Verteilung der Messwerte:

  zwischen -1s und +1s liegen 68,26%

  zwischen -2s und +2s liegen 95,44%

  zwischen -3s und +3s liegen 99,73%

- Beispiel:

  n = 100; μ = 32; σ = 10; x_a = 22; Normalverteilung liegt vor;

  z = 22-32/10 = -1;

  50% - 34, 13 = 15,87% liegen unter x_i ; 50% + 34,13% = 84,13% liegen über x_a

Statistische Überprüfung von Hypothesen

- Die Grundlage für die Entscheidung, ob die Stichprobenergebnisse für die Population gelten ist die Nullhypothese.

- Irrtumswahrscheinlichkeit/□-Fehler/Fehler 1. Art:

  Die Irrtum bezieht sich darauf, dass die Nullhypothese (Mittelwerte in der Population sind gleich) zu unrecht abgelehnt wird. Es wird ein Mittelwertsunterschied/Zusammenhang angenommen, obwohl er nicht vorhanden ist.

- □-Fehler/Fehler 2. Art:

  Der □-Fehler ist die Wahrscheinlichkeit keinen Mittelwertsunterschied/Zusammenhang in der Population anzunehmen, obwohl einer vorhanden ist. Die Alternativhypothese wird zu unrecht verworfen.

α-Fehler und β-Fehler

- α-Fehler:

  Die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art wird per Konvention auf 1% oder 5% festgelegt und als Signifikanzniveau bezeichnet.

- β-Fehler:

  Im Gegensatz zum Fehler 1. Art kann die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art nicht willkürlich festgelegt werden, ohne den Fehler 1. Art zu verändern bzw. anzupassen.

- Beispiel:

  Welchen Fehler man eher begehen will, kann gesteuert werden: Ist es schlimmer einen Gesunden in Therapie zu schicken, oder einen Kranken ohne Behandlung zu lassen.

  H_0: Der Patient unterscheidet sich nicht von der Normalpopulation.

  H_1: Der Patient unterscheidet sich von der Normalpopulation.

  α-Fehler: Der Gesunde wird fälschlicherweise behandelt.

  β-Fehler: Der Kranke wird nicht behandelt.

□-Fehler und □-Fehler

		Stichprobe	
Population		H_0	H_1
	H_0	Richtige Entscheidung	α-Fehler
	H_1	β-Fehler	Richtige Entscheidung

Statistische Überprüfung von Hypothesen

- Teststärke:

  Die Teststärke 1-□gibt an wie wahrscheinlich es ist, dass ein besehender Unterschied/Zusammenhang in der Population entdeckt wird. Es ist die Wahrscheinlichkeit die Alternativhypothese nachzuweisen, falls sie zutrifft.

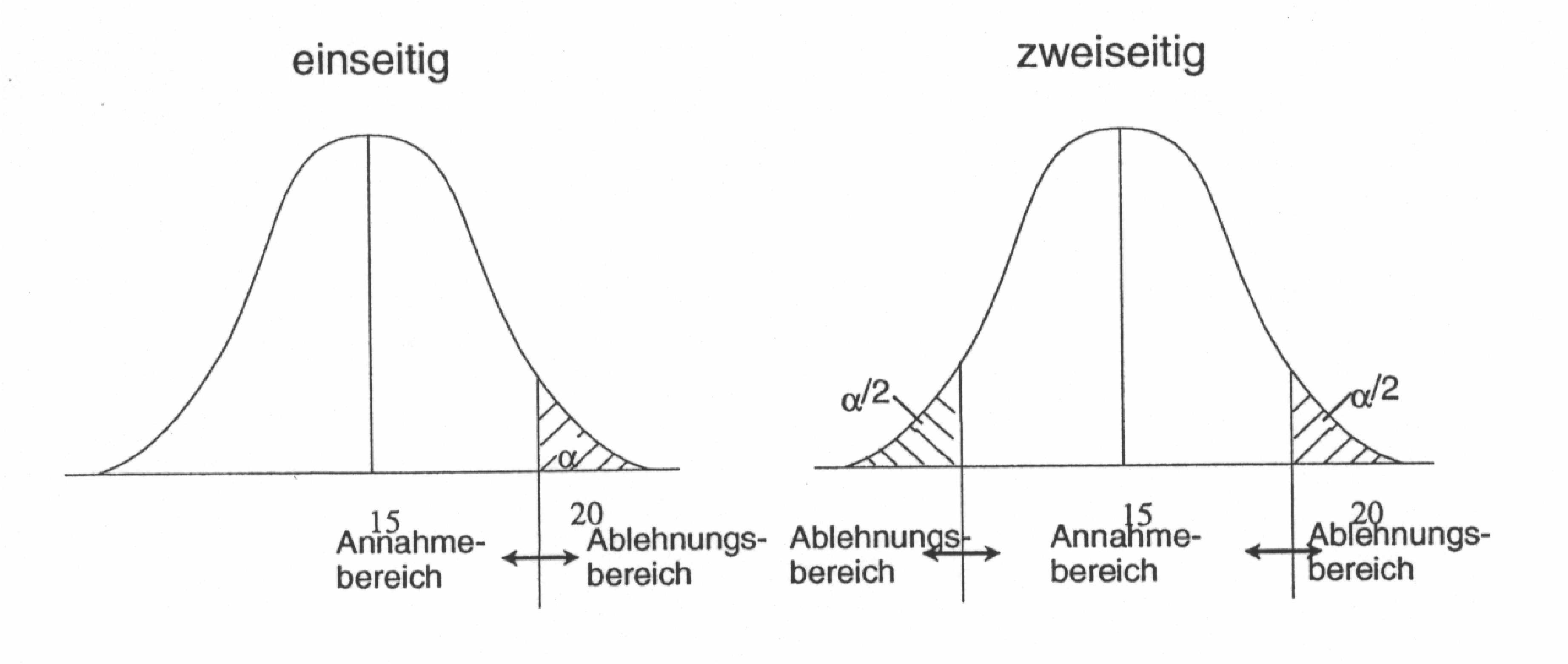
- Information:

  Signifikanztests sagen nichts über die Gültigkeit der Hypothesen aus, sondern nur über ihre Auftretenswahrscheinlichkeit. Die Hypothesen H_0 und H_1 repräsentieren dabei Alternativen von denen nur eine zutrifft. Ob sie auch wahr ist kann durch den Signifikanztest nicht ermittelt werden, lediglich Wahrscheinlichkeiten für das Zutreffen oder nicht-Zutreffen solcher Hypothesen können spezifiziert werden.

- Beispiel:

  Ein Floh wird auf das Kommando „Spring“ dressiert zu springen. Dem Floh werden die Beine entfernt und der Floh wird aufgefordert: „Spring“. Er springt nicht. Der Experimentator folgert, dass der Floh durch die Beinamputation taub geworden ist.

Annahme- und Ablehnungsbereich einseitiger und zweiseitiger Hypothesen



Zusammenfassung

- Forschungsprozess
- Grundlagen der Untersuchungsplanung
- Deskriptive Statistik
- (Standard-) Normalverteilung und statistische Überprüfung von Hypothesen
- à Statistische Überprüfung von Unterschieden
  à Statistische Überprüfung von Zusammenhängen

Statistische Überprüfung von Unterschieden - Voraussetzungen

- Für die Überprüfung von Unterschieden stehen eine Reihe von Verfahren zur Verfügung. Zur Auswahl eines Verfahrens müssen die folgenden vier Bedingungen geprüft werden:

1. Anzahl der Stichproben (zwei oder mehr)
2. Art der Stichproben (abhängig oder unabhängig)
3. Skalenniveau der abhängigen Variablen
4. Verteilungseigenschaften der Population (liegt Normalverteilung vor)

Statistische Überprüfung von Unterschieden – Übersicht über Prüfverfahren

Verhältnis d. Stichproben zueinander	Skalenniveau		
	Nominal	Ordinal	Intervall
unabhängige Stichproben	CHI-Quadrat-Test	Mann-Whitney-U-Test Kruskal-Wallis-H-Test	Mann-Whitney-U-Test t-Test F-Test Varianzanalyse
abhängige Stichproben	McNemar-CHI-Quadrat-Test Cochran-Q-Test	Wilcoxon Friedman	Wilcoxon t-Test Varianzanalyse

Statistische Überprüfung von Unterschieden – Übersicht über die CHI-Quadrat-Verfahren

	Ein Merkmal	2 Merkmale	m Merkmale
2fach gestuft	einmalige Untersuchung: 1-dimensionales CHI-Quadrat zweimalige Untersuchung: McNemar-CHI-Quadrat-Test mehrmalige Untersuchung: Cochran-Q-Test	4 Felder - CHI-Quadrat-Test	Konfigurations-frequenzanalyse für alternative Merkmale
mehrfach gestuft	1-dimensionales CHI-Quadrat: Vergleich einer empirischen mit einer theoretischen Verteilung	k x l - CHI-Quadrat-Test	Konfigurations-frequenzanalyse für mehrfach gestufte Merkmale

Statistische Überprüfung von Unterschieden – Beispiel für die CHI-Quadrat-Verfahren

	1 Merkmal	2 Merkmale	m Merkmale
2fach gestuft	Sind am Sportinstitut mehr Studentinnen als Studenten Eingeschrieben? Ist die Anzahl der Sporttreibenden nach einer Sportkampagne gestiegen?	Gibt es mehr weibliche oder mehr männliche Langzeitstudenten?	Treiben Männer auf dem Land besonders häufig Sport?
mehrfach gestuft	Wird einer von zehn Sportschuhen überzufällig häufig gekauft?	Unterscheidet sich die Art der Motivation bei verschiedenen Sportarten	Welche Sportarten werden von Frauen in der Stadt besonders häufig ausgeübt

Vorgehen zur Berechnung eines Unterschieds

1. Problemstellung

2. Hypothesen

3. Voraussetzungen

4. Berechnungen/Formel

5. Signifikanzprüfung & formale Entscheidung

6. Interpretation

Chi-Quadrat

1. Problemstellung:

   Für eine oder mehrere Stichproben liegen die Kategrienhäufigkeiten in einer beobachteten Variablen vor. Es soll geprüft werden, ob die beobachteten Kategorienhäufigkeiten signifikant von den Erwartungswerten abweichen.

   Der Erwartungswert ist der Wert, der sich in der Regel bei einer oftmaligen Wiederholung des zugrunde liegenden Experiments als Mittelwert der tatsächlichen Ergebnisse ergibt (wiederholte Zufallsexperimente werden gemittelt).

   Beispiel:

   Ist die Anzahl der Sporttreibenden nach einer Sportkampagne gestiegen?

2. Hypothesen:

   H0: Die Beobachtungswerte unterscheiden sich nicht signifikant von den Erwartungswerten.

   H1: Die Beobachtungswerte unterscheiden sich signifikant von den Erwartungswerten.

Chi-Quadrat

3. Voraussetzungen und Einschränkungen:

   Die Erwartungswerte müssen für alle Kategorien in allen Stichproben größer 0 sein.

   Die Erwartungswerte dürfen in maximal 20% der Zellen < 5 sein

4. Berechnung:

   - Alle Beobachtungsdaten sind bekannt und eindeutig den jeweiligen Kategorien zuzuordnen.

   - Erstellung der Kreuztabelle:

		Variable		
		Kat x	Kat y	∑
Stichproben	S1	a	b	N Stichprobe 1
	S2	c	d	N Stichprobe 2
	∑	N Kat x	N Kat y	N Gesamt

Chi-Quadrat

- Berechnung der Erwartungswerte:

Die Erwartungswerte sind diejenigen Werte, die im Falle zufälliger Verteilungen der Daten in den einzelnen Kategorien auftreten würden:

$$Erwartungs\,wert = \frac{N_{Zeilen} \times N_{Spalten}}{N_{Gesamt}}$$

- Berechnung des Chi-Quadrats:

$$CHI^2 = \sum_i \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i}$$

o_i = Beobachtungswerte
e_i = Erwartungswerte

Chi-Quadrat

- Berechnung der Freiheitsgrade:

df = (Spalten – 1) x (Zeilen – 1)

5. Signifikanzprüfung:

   - Vergleich des empirischen Chi-Quadrat-Wert mit dem theoretischen (kritischen) Chi-Quadrat-Wert mit Hilfe der Tabelle unter der Berücksichtigung der Freiheitsgrade.

   - Formale Entscheidung (Hypothesentestung):

   empirischer Wert < Tabellenwert → H0 annehmen

   empirischer Wert ≥ Tabellenwert → H0 ablehnen

6. Interpretation:

   mittels Vergleich von Beobachtungs- und Erwartungswerten

Beispiel Chi-Quadrat

1. Problemstellung:

   Es interessiert die Frage, ob sich ein Zusammenhang zwischen sportbezogenem Interesse und dem Konsum bestimmter Sportsendungen aufzeigen lässt. Die Gesamtstichprobe von n=690 ist nach Sportinteresse in drei Gruppen unterteilt und wurde nach einer bestimmten, spät ausgestrahlten Sport-Sondersendung gefragt, ob sie gar nicht, teilweise oder ganz gesehen wurde.

2. Hypothesen:

   H0: Die drei Teilstichproben mit unterschiedlichem Sportinteresse unterscheiden sich nicht in der Sehbeteiligung bei der Fernsehsendung

   H1: Die drei Teilstichproben unterscheiden sich überzufällig.

3. Voraussetzungen:

   Die Erwartungswerte müssen für alle Kategorien in allen Stichproben größer 0 sein.

   Die Erwartungswerte dürfen in maximal 20% der Zellen < 5 sein

Beispiel Chi-Quadrat

4. Berechnung:

   - Vierfeldertafel:

		Sehbeteiligung			
		Nicht	Teilweise	Ganz	∑
Sportinteresse	Hoch	141	10	40	191
	Mittel	169	9	20	198
	Gering	292	9	0	301
	∑	602	28	60	690

Beispiel Chi-Quadrat

- Erwartungswert:

$$Erwartungs\,wert = \frac{N_{Zeilen} \times N_{Spalten}}{N_{Gesamt}}$$

Beispiel: e1 = 602 x 191 / 690 = 166.64

		Sehbeteiligung			
		Nicht	Teilweise	Ganz	$\sum$
Sportinteresse	Hoch	141/166.6	10/7.8	40/16.6	191
	Mittel	169/172.7	9/8.0	20/17.2	198
	Gering	292/262.6	9/12.2	0/26.2	301
	$\sum$	602	28	60	690

Beispiel Chi-Quadrat

- Chi-Quadrat:

$$CHI^2 = \sum_i \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i}$$

$Chi^2 = (141 – 166,6)^2 / 166.6 + (10-7.8)^2 / 7.8 + ….. + (0-26.2)^2 / 26.2 = 68.54$

- Freiheitsgrade:

df = (Spalten -1) x (Zeilen – 1) = (3 – 1) x (3 – 1) = 4

Beispiel Chi-Quadrat

5. Signifikanzprüfung:

   df = 4; p = .05 à 9.49
   df = 4; p = .01 à 13.28

   Formale Entscheidung (Hypothesentestung):
   Empirischer Chi-Quadrat-Wert > Tabellenwert à H1 gilt.
   Die drei Gruppen mit unterschiedlichem Sportinteresse unterscheiden sich überzufällig in der Sehbeteiligung bei der spät in der Nacht ausgestrahlten Fernsehsendung.

6. Interpretation:
   mittels Vergleich von Beobachtungs- und Erwartungswerten

McNemar-Test

0. Allgemeines:

Der Mc-Nemar-Test basiert auf dem gleichen Prinzip wie der Chi-Quadrat-Test. Unterschied: Beobachtete *Veränderungen* von Werten werden mit den zu erwartenden Veränderungen verglichen.

• Problemstellung:

Für zwei abhängige Stichproben kann die Signifikanz von Unterschieden bei nominalskalierten Daten berechnet werden.

2. Hypothesen:

H0: Die Anzahl der positiven und negativen Veränderungen sind gleich.

H1: Die Anzahl der positiven und negativen Veränderungen unterscheiden sich.

Mc-Nemar-Test

3. Voraussetzungen:

   Die Erwartungswerte in den Zellen b und c in der Vierfeldertafel müssen > 5 sein.

   Alle Erwartungswerte müssen > 0 sein.

4. Berechnung:

   - Alle Beobachtungsdaten sind bekannt und lassen sich in einer Vierfeldertafel darstellen:

a	b
c	d

- Berechnung der Erwartungswerte für die Zellen b und c:

  E = 1/2 (b + c)

- Berechnung des Chi-Quadrats:

$$CHI^2 = \frac{(b-c)^2}{b+c}$$

Mc-Nemar-Test

- Berechnung der Freiheitsgrade:

  df = 1

5. Signifikanzprüfung:

   $Chi^2 < 3.84$ (p<.01) bzw. 6.64 (p<.05) => H0 annehmen
   $Chi^2 > 3.84$ (p<.01) bzw. 6.64 (p<.05) => H0 ablehnen

6. Interpretation

   mittels Vergleich von Beobachtungs- und Erwartungswerten

Beispiel Mc-Nemar-Test

1. Problemstellung:

   Es interessiert, ob eine Zeitungskampagne gegen das Zigarettenrauchen erfolgreich war. Die Personen der Gesamtstichprobe (N=273) werden zweimal befragt, ob sie rauchen oder nicht. Einmal vor einmal nach der Kampagne. 80 Personen rauchen sowohl vor als auch nach der Kampagne, 25 gaben nach der Kampagne das Rauchen auf, 12 haben nach der ersten Befragung mit dem Rauchen begonnen und 120 Personen rauchen weder vorher noch nachher.

2. Hypothesen:

   H0: Die Zahl der Personen, die ihr Verhalten nach der Kampagne positiv verändert haben ist nur zufällig verschieden von der Zahl der Personen, die ihr Verhalten negativ verändert haben.

   H1: Nach der Kampagne haben mehr Personen ihr Verhalten in die positive Richtung verändert.

Beispiel Mc-Nemar-Test

3. Voraussetzungen:
   Die Erwartungswerte in den Zellen b und c in der Vierfeldertafel müssen > 5 sein.
   Alle Erwartungswerte müssen > 0 sein.

4. Berechnung:
   - Vierfeldertafel

1. Unter-suchung	2. Untersuchung		
		+	-
	+	80	25
	-	12	120

Beispiel Mc-Nemar

- Erwartungswert:

  E = ½ (b+c) = ½ (25+12) = 18.5 = der Erwartungswert für die Zellen b und c, die > 5 sein müssen.

- Chi-Quadrat:

$$Chi^2 = \frac{(b-c)^2}{b+c}$$

  $Chi^2 = (25 - 12)^2 / 37 = 4{,}57$

- Freiheitsgrad:

  df = 1

Beispiel Mc-Nemar

5. Signifikanzprüfung:

df = 1; p = .05 à 3,84

df = 1; p = .01 à 6.63

Formale Entscheidung (Hypothesentestung):

Empirische Chi-Quadrat-Wert ist für p = .05 > Tabellenwert à H1 gilt

Empirische Chi-Quadrat-Wert ist für p = .01 < Tabellenwert à H0 gilt

Je nach Wahl des Signifikanzniveaus liegt ein Unterschied vor, oder nicht. Daher sollte das Signifikanzniveau immer *vorher* festgelegt werden.

6. Interpretation:

mittels Vergleich von Beobachtungs- und Erwartungswerten