F-Test

1. Problemstellung:

   Unterscheiden sich die Varianzen zweier oder mehrerer Stichproben signifikant voneinander, oder weisen sie Homogenität auf? In Abhängigkeit von der Varianzhomogenität werden verschiedene Formeln des t-Tests verwendet.

2. Hypothesen:

   H0: Der empirische Unterschied zwischen den Stichprobenvarianzen ist rein zufällig.

   H1: Der Unterschied zwischen den Stichprobenvarianzen ist überzufällig.

3. Voraussetzung:

   Die zu vergleichenden Stichproben sind unabhängig.

4. Berechnung:

$$F = \frac{größere\ Varianz}{kleinere\ Varianz} = \frac{Max\ s^2}{Min\ s^2}$$

F-Test

6. Signifikanzprüfung:

df1 = n1-1; df2 = n2-1

emp. F-Wert ≤ theor. Wert à H0 trifft zu
à Varianzhomogenität à t-Test für homogene Varianzen

emp. F-Wert > theor. Wert à H1 trifft zu
à Varianzheterogenität à t-Test für heterogene Varianzen

Beispiel t-Test für unabhängige Stichproben

1. Problemstellung:

Unterscheidet sich die Klasse A von der Klasse B in einem Fitnesstest?

Häufigkeitsverteilung der Testpunktwerte:

Klasse A (n1=23): 12, 13, 15, 15, 16, 17, 17, 17, 18, 18, 19, 19, 19, 19, 20, 22, 22, 22, 23, 24, 24, 26, 31

Klasse B (n2=21): 13, 14, 14, 15, 16, 18, 18, 18, 19, 19, 20, 20, 20, 22, 23, 23, 24, 26, 26, 29, 38

x1=19,52; x2=20,71 s1=4,36; s2=5,83

Schiefe1=0,65; Schiefe2=1,30 Exzess1=0,90; Exzess2=2,63

2. Hypothesen:

H0: Die beiden Klassen A und B unterscheiden sich nicht hinsichtlich ihrer Fitnessleistung.

H1: Zwischen beiden Schulklassen A und B besteht ein signifikanter Unterschied im Fitnesstest.

Beispiel t-Test für unabhängige Stichproben

3. Prüfung der Anwendungsvoraussetzungen:

- Intervallskalenniveau: Es handelt sich um echte Messwerte, die intervallskaliert sind

- Varianzhomogenität: F-Test

  $F=(5{,}83)^2 / (4{,}36)^2 = 1{,}79$; df1=20, df2=22; p=.05 à F=2,03 à H0 gilt

- Normalverteilung

  Die Normalverteilung hat eine Schiefe und einen Exzess von 0. Es wird geprüft, ob die Stichprobenkenngrößen signifikant von 0 abweichen:

  Prüfgröße für die Schiefe: $t = \text{Schiefe} / \sqrt{6/n}$

  Prüfgröße für den Exzess: $t = \text{Exzess} / 2\text{x}\sqrt{6/n}$

Beispiel t-Test für unabhängige Stichproben

Die folgende Tabelle zeigt die errechneten t-Werte mit Signifikanzangaben (p=.01):

	Schiefe	Exzess
Stichprobe 1	1,27 n.s.	0,84 n.s.
Stichprobe 2	2,54 n.s.	2,46 n.s.

à Alle t-Werte sind nicht signifikant, die Annahme der Normalverteilung bleibt also erhalten.

à Damit sind alle Voraussetzungen erfüllt

Beispiel t-Test (homogen) für unabhängige Stichproben

4. Berechnung:

   t=|19,52-20,71| / √22x4,36+20x5,83/23+21-2x(1/23+1/21) = 0,77

   df=23+21-2=42; p=.05 à theor. t-Wert=2,021

   emp. t-Wert < theor. t-Wert à H0 trifft zu

   à Es besteht kein signifikanter Unterschied zwischen den beiden Schulklassen.

5. Interpretation:

   Die beiden Schulklassen unterscheiden sich nicht in der Fitnessleistung.

t-Test für unabhängige Stichproben – t-Test für heterogene Varianz

Ist der F-Test signifikant, d.h. die Stichprobenvarianzen unterscheiden sich, dann wird der t-Test für heterogene Varianzen berechnet (t1 und t2 sind die beiden theoretischen t-Werte der Tabelle):

4. Berechnung:

emp. t-Wert:

$$t = \frac{\left| \bar{x}_1 - \bar{x}_2 \right|}{\sqrt{\frac{s_1^2}{N_1 - 1} + \frac{s_2^2}{N_2 - 1}}}$$

theor. t-Wert:

$$t = \frac{t_1 \times \frac{s_1^2}{N_1 - 1} + t_2 \times \frac{s_2^2}{N_2 - 1}}{\sqrt{\frac{s_1^2}{N_1 - 1} \times \frac{s_2^2}{N_2 - 1}}}$$

Beispiel t-Test (heterogen) für unabhängige Stichproben

Angenommen der F-Test aus dem obigen Beispiel ist signifikant:

4. Berechnung:

Empirischer Wert:

$$t = \frac{|19.52 - 20.71|}{\sqrt{\frac{4.36^2}{22} + \frac{5.83^2}{20}}} = 0.74$$

Theoretischer Wert:

$$t = \frac{2.074 \times \frac{4.36^2}{22} + 2.086 \times \frac{5.83^2}{20}}{\sqrt{\frac{4.36^2}{22} \times \frac{5.83^2}{20}}} = 3.33$$

Beispiel t-Test (heterogen) für unabhängige Stichproben

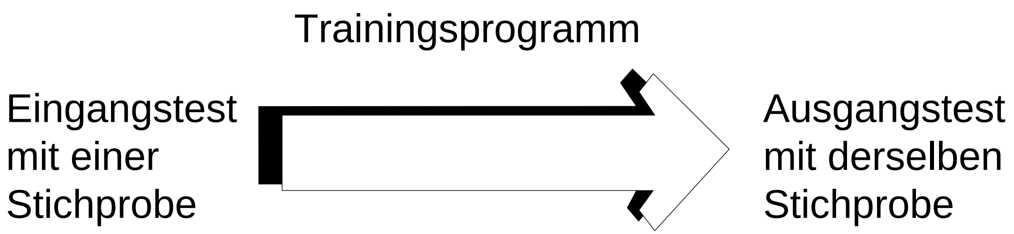
5. Signifikanzprüfung:

   emp. Wert < theor. Wert à H0 trifft zu

T-Test für abhängige Stichproben

1. Problemstellung:

Unterscheiden sich die Mittelwerte zweier abhängiger Stichproben voneinander? Das klassische Untersuchungsdesing sieht folgendermaßen aus:



2. Hypothesen:

H0: Der Unterschied zwischen den Mittelwerten der beiden Stichproben ist rein zufällig.

H0: Die beiden Mittelwerte unterscheiden sich überzufällig.

T-Test für abhängige Stichproben

3. Voraussetzungen:

- Intervallskalenniveau
- Die beiden Voraussetzungen Varianzhomogenität und Normalverteilung der Messwerte spielen eine nicht do wesentliche Rolle. Wenn die Abweichungen nicht allzu extrem sind, kann der t-Test dennoch berechnet werden.

4. Berechnung:

$$t = \frac{\bar{d}}{\sqrt{\frac{\sum d_i^2 - n \times \bar{d}^2}{n(n-1)}}}$$

T-Test für abhängige Stichproben

5. Signifikanzprüfung:

   Freiheitsgrade: df=n-1

   Weiteres Vorgehen vgl. t-Test für unabhängige Stichproben;

Beispiel t-Test für abhängige Stichproben

1. Problemstellung:

   Hat ein statistisches Lernprogramm einen positiven Effekt auf die Klausurergebnisse oder nicht?

2. Hypothesen:

   H0: Eventuelle Mittelwertsunterschiede sind rein zufällig.

   H1: Das statistische Lernprogramm übt einen positiven Einfluss aus. Die Mittelwerte unterscheiden sich überzufällig.

Beispiel t-Test für abhängige Stichproben - Daten

Vpn	Testwert vor Lernpr.	Testwert nach Lernpr.	Differenz d	d^2
1	5	7	+2	4
2	8	9	+1	1
3	3	6	+3	9
4	8	6	-2	4
5	5	5	0	0
6	6	6	0	0
7	7	8	+1	1
8	6	10	+4	16
9	4	7	+3	9
10	4	3	-1	1
11	6	8	+2	4
12	7	7	0	0
13	7	9	+2	4
14	4	6	+1	1
15	3	5	+2	4
$\sum$	84	102	+18	58
Mittelwert	5,60	6,80	+1,20	3,87

Beispiel t-Test für anhängige Stichproben

3. Berechnung:

$$t = \frac{+1.2}{\sqrt{\frac{\left(58-\left(15\times 1.44\right)\right)}{15\times 14}}} = \frac{1.2}{0.416} = 2.88$$

4. Signifikanzprüfung:

   df=15-1=14; p=.05

   theor. t-Wert=1,76 (bei einseitiger Testung kann das Signifikanzniveau verdoppelt werden)

   emp. t-Wert > theor. t-Wert à H1 trifft zu

5. Interpretation:

   Die Werte nach dem Lernprogramm sind signifikant besser. Die beobachteten Unterschiede lassen sich auf das Lernprogramm zurückführen.

Einführung in die einfaktorielle Varianzanalyse

1. Problemstellung:

   Die einfaktorielle Varianzanalyse ist ein Verfahren zur Überprüfung der Frage, ob sich wenigstens zwei der Mittelwerte von mehr als zwei Erhebungen (drei oder mehr Stichproben) nur zufällig voneinander unterscheiden oder ob die gefundenen Unterschiede auf die den Stichproben zugrunde liegenden Grundgesamtheiten übertragbar sind.

2. Voraussetzungen:
   - Intervallskalenniveau
   - Normalverteilung
   - Unabhängige Stichproben
   - Mehr als zwei Stichproben
   - Gleiche Varianzen (Streuung) in den Grundgesamtheiten

Einführung in die einfaktorielle Varianzanalyse

0. Idee:

   Verfahren, bei dem die Varianz einer intervallskalierten abhängigen Variablen auf eine unabhängige Variable mit drei oder mehr Stufen zurückgeführt wird.

à Sie ist eine Erweiterung des t-Tests für unabhängige Messungen.

Man überprüft, ob sich k unabhängige Stichproben (Stufen) hinsichtlich eines auf Intervallskalenniveau gemessenen Merkmals unterscheiden.